Examen VWO

2021

tijdvak 1
maandag 17 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Dit examen bestaat uit 14 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 74 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formules

Goniometrie

$$\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u)=\sin(t)\cos(u)-\cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u)=\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u)$$

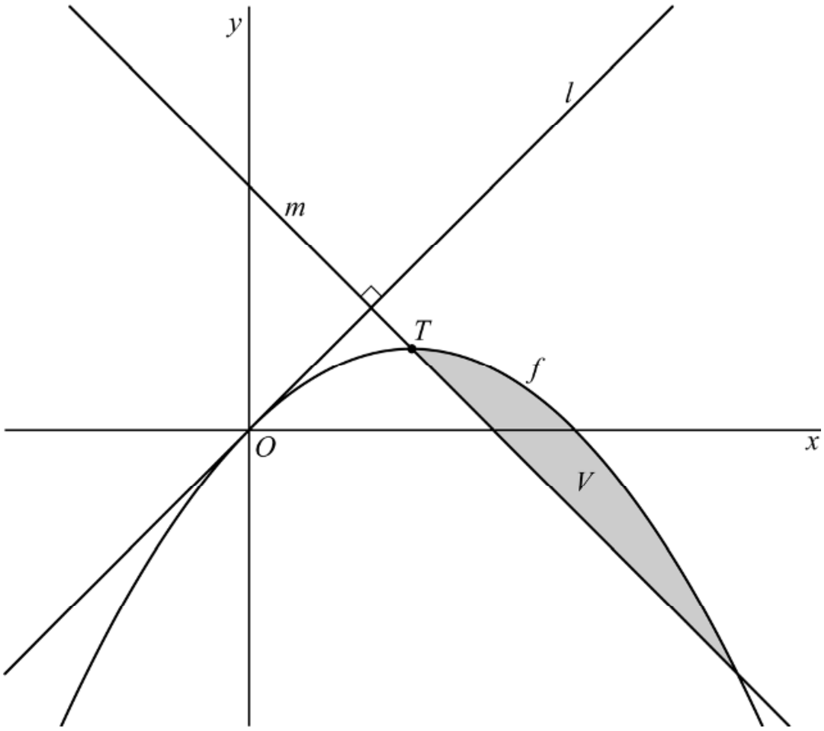
$$\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t)=\cos^2(t)-\sin^2(t)=2\cos^2(t)-1=1-2\sin^2(t)$$

Parabool en twee lijnen

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x - x^2$.

Het punt $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ is de top van de grafiek van f.
De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in de oorsprong.
De lijn m staat loodrecht op lijn l en gaat door T.
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door lijn m en de grafiek van f.
Zie de figuur.

figuur



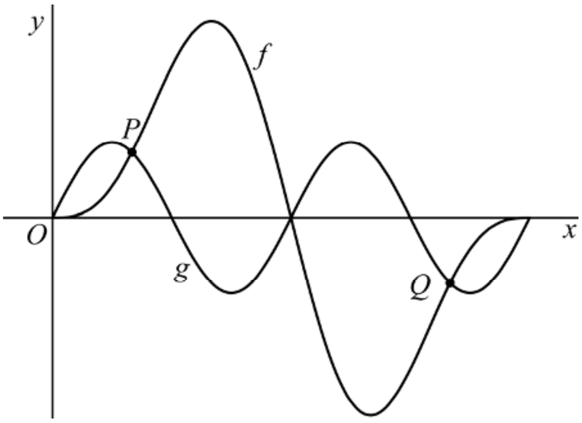
8p **1** Bereken exact de oppervlakte van V.

De functies f en g worden voor $0 \le x \le 2\pi$ gegeven door:

$$f(x) = 2\sin(x) - \sin(2x)$$
$$g(x) = \sin(2x)$$

De grafieken van f en g hebben vijf gemeenschappelijke punten. Drie van deze punten liggen op de x-as. De andere twee punten zijn P en Q.
Zie figuur 1.

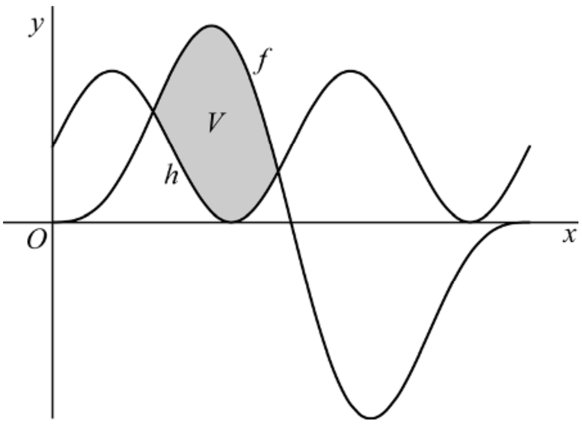
figuur 1



4p **2** Bereken exact de x-coördinaten van P en Q.

De grafiek van g wordt 1 omhoog geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie h. Zie figuur 2.
V is het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en h. In figuur 2 is dit gebied grijs gemaakt.

figuur 2

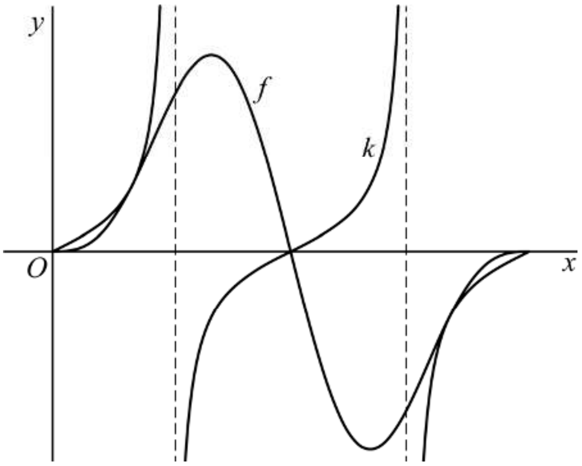


De grafieken van f en h snijden elkaar in twee punten. De x-coördinaten van deze twee punten zijn afgerond 1,33 en 2,97.

5p **3** Bereken de oppervlakte van V met behulp van primitiveren. Geef je eindantwoord in één decimaal.

De functie k wordt gegeven door $k(x)=\frac{1}{2}\tan(x)$. Zie figuur 3, waarin de grafieken van k en f zijn weergegeven.

figuur 3



De grafiek van k raakt de grafiek van f in een punt met x-coördinaat $\frac{1}{3}\pi$.

4p **4** Bewijs dat voor $x=\frac{1}{3}\pi$ de grafieken van k en f elkaar inderdaad raken.

Aardbevingen

Een aardbeving ontstaat op een plek in de aarde. Het punt recht boven die plek, op het aardoppervlak, heet het **epicentrum** van die aardbeving. We bekijken in deze opgave een model over aardbevingen, waarbij we ervan uitgaan dat de aardbeving in het epicentrum ontstaat.

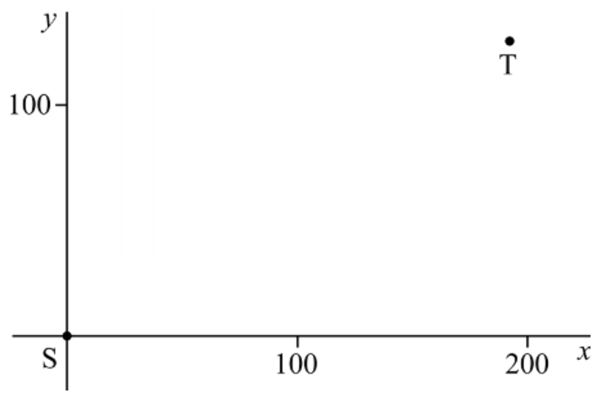
Bij een aardbeving ontstaan verschillende typen golven in de aarde: primaire golven en secundaire golven. Primaire golven zijn sneller dan secundaire golven. We nemen in deze opgave aan dat een primaire golf een constante snelheid van 6 km/s heeft en een secundaire golf een constante snelheid van 3,5 km/s.

Een seismograaf is een meetinstrument waarmee je primaire en secundaire golven van elkaar kunt onderscheiden. Bij een bepaalde aardbeving registreert een seismograaf in een meetstation dat de eerste secundaire golf 17 seconden na de eerste primaire golf bij het meetstation aankomt. Met deze gegevens kun je de afstand d (in km) van de seismograaf tot het epicentrum van de aardbeving bepalen.

4p **5** Bereken deze afstand d.

Om de plaats van het epicentrum te bepalen worden de meetgegevens van verschillende meetstations gecombineerd. In een bepaald gebied staan twee meetstations: S en T. Meetstation T ligt 192 km oostelijker en 128 km noordelijker dan meetstation S.
Uit de metingen in meetstation S volgt dat het epicentrum van de aardbeving op een afstand van 240 km van dit meetstation S ligt.
Uit de metingen in meetstation T volgt dat het epicentrum op 80 km van dit meetstation T ligt.
Op grond van deze gegevens zijn er twee mogelijke plaatsen van het epicentrum aan te wijzen. Om deze plaatsen te bepalen worden de meetstations in een assenstelsel geplaatst, waarbij meetstation S in de oorsprong ligt. De coördinaten van meetstation T zijn dan (192, 128). Zie de figuur.

figuur



6p **6** Bereken algebraïsch de coördinaten van de twee mogelijke plaatsen van het epicentrum in kilometers. Geef de coördinaten in je eindantwoord als gehele getallen.

De zwaarte van een aardbeving wordt uitgedrukt in een getal: de **magnitude**. Een zware aardbeving heeft een grote magnitude, een lichte aardbeving heeft een kleine magnitude. De United States Geological Survey heeft voor verschillende magnitudes onderzocht hoe vaak aardbevingen met die magnitude in een bepaald gebied voorkwamen.
Zie de tabel.

tabel

magnitude	**gemiddeld aantal aardbevingen per jaar**
6,0 – 6,4	210
6,5 – 6,9	56
7,0 – 7,4	15
7,5 – 7,9	3,1
8,0 – 8,4	1,1
8,5 – 8,9	0,3

De onderzoekers Gutenberg en Richter hebben een model ontwikkeld om het aantal aardbevingen per jaar in een gebied te voorspellen. Dit model is van de vorm:

$$N = 10^{a-bM}$$

Hierin is M de magnitude en N het te verwachten aantal aardbevingen per jaar met deze magnitude M **of groter**. De waarden a en b zijn constanten.

Uit de tabel kun je afleiden dat er gemiddeld 285,5 aardbevingen per jaar zijn met een magnitude van 6,0 of groter. Ook kun je afleiden dat er gemiddeld 4,5 aardbevingen per jaar zijn met een magnitude van 7,5 of groter.
Met behulp van deze twee gegevens is het mogelijk de waarden van a en b uit te rekenen. Vervolgens kun je met dat model een voorspelling doen van het aantal aardbevingen per jaar met een magnitude van 6,5 of groter.

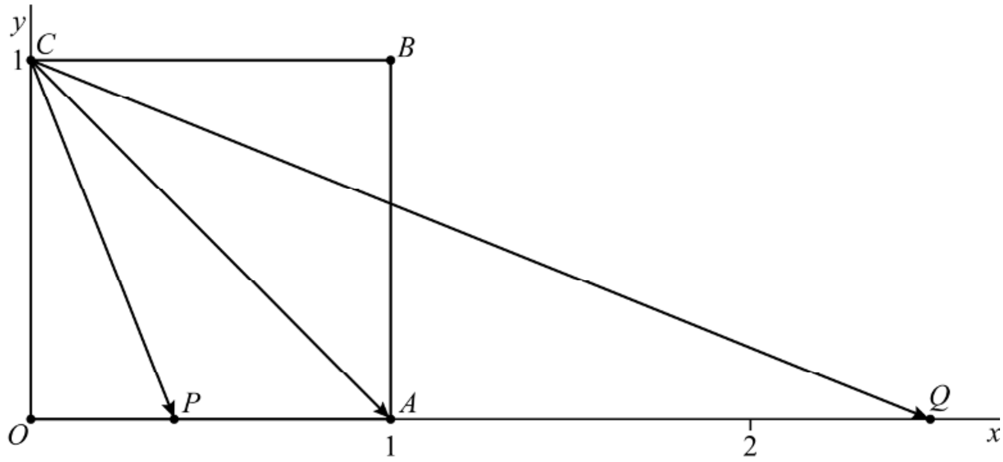
6p **7** Onderzoek hoeveel die voorspelling afwijkt van de gegevens in de tabel. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Een vierkant en vier vectoren

Gegeven is het vierkant $OABC$ met hoekpunten $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ en $C(0,1)$. Verder zijn gegeven het punt $P(p,0)$ en het punt $Q\left(\frac{1}{p},0\right)$, met $0<p<1$.

In figuur 1 zijn de vectoren $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$ voor een willekeurige waarde van p weergegeven.

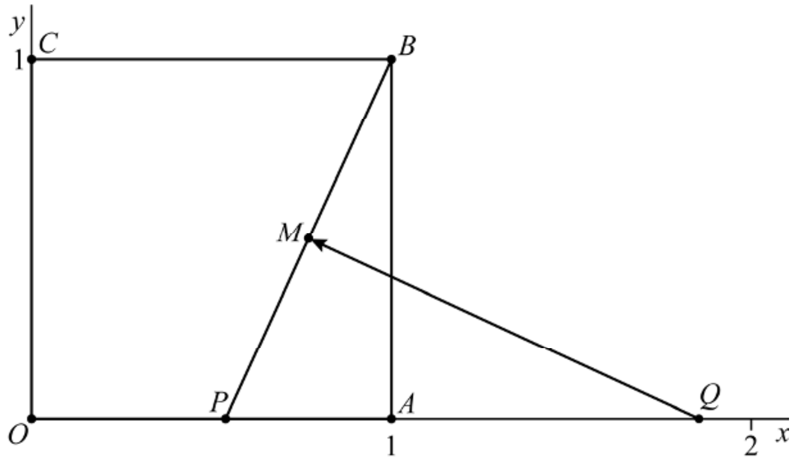
figuur 1



6p **8** Bewijs dat voor elke waarde van p de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ gelijk is aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$.

M is het midden van lijnstuk PB. Zie figuur 2, waarin ook lijnstuk PB en vector $\overrightarrow{QM}$ zijn getekend.

figuur 2



In figuur 2 is p zo gekozen dat vector $\overrightarrow{QM}$ loodrecht staat op lijnstuk PB.

7p **9** Bereken deze waarde van p. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

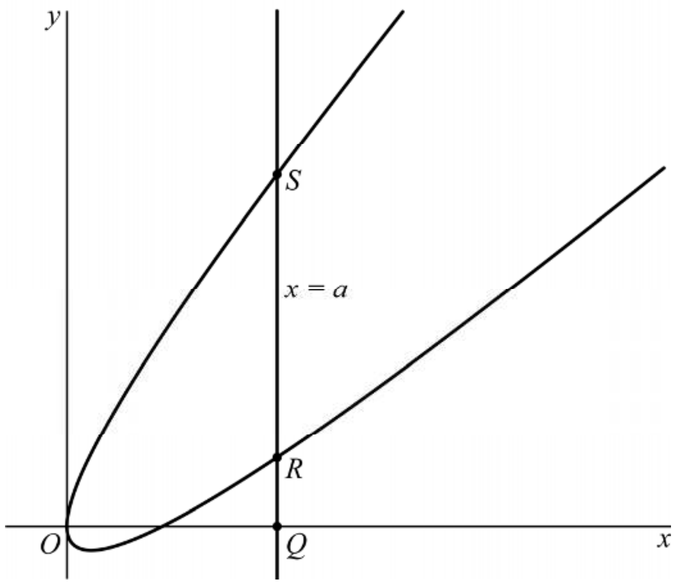
Limiet van een verhouding

De beweging van een punt P wordt beschreven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$$

Gegeven is de lijn met vergelijking $x = a$, waarbij $a > 0$.
Deze lijn snijdt de x-as in punt Q en de baan van P in de punten R en S, waarbij de y-coördinaat van S groter is dan de y-coördinaat van R.
Zie de figuur.

figuur



Als a onbegrensd toeneemt, nadert de verhouding $\dfrac{QR}{QS}$ tot een limiet.

4p **10** Bereken exact deze limiet.

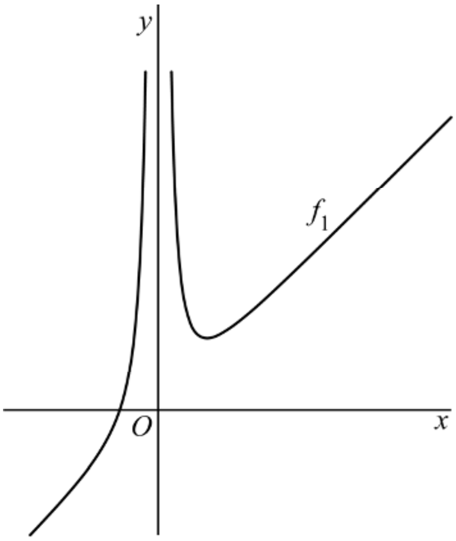
Gebroken functie met een parameter

Voor $p > 0$ wordt de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = \frac{x^3 + 4p}{x^2}$$

In de figuur is de grafiek van f_1 weergegeven.

figuur



De grafiek van f_1 heeft een scheve asymptoot.

3p **11** Bewijs dat de grafiek van f_1 boven deze scheve asymptoot ligt.

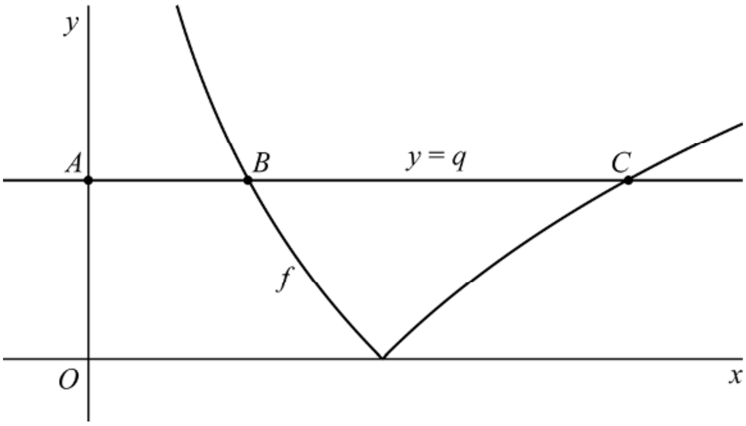
Voor elke waarde van $p > 0$ heeft de grafiek van f_p één top.

5p **12** Bewijs dat er een lijn is waarop al deze toppen liggen.

Absolute natuurlijke logaritme

De functie f wordt gegeven door $f(x) = |\ln(x)|$.
Gegeven is verder de horizontale lijn met vergelijking $y = q$, met $q > 0$.
Deze lijn snijdt de y-as in het punt A en de grafiek van f in de punten B en C met $x_B < x_C$. Zie de figuur.

figuur



Er is een waarde van q waarvoor de lengte van lijnstuk BC drie keer zo groot is als de lengte van lijnstuk AB.

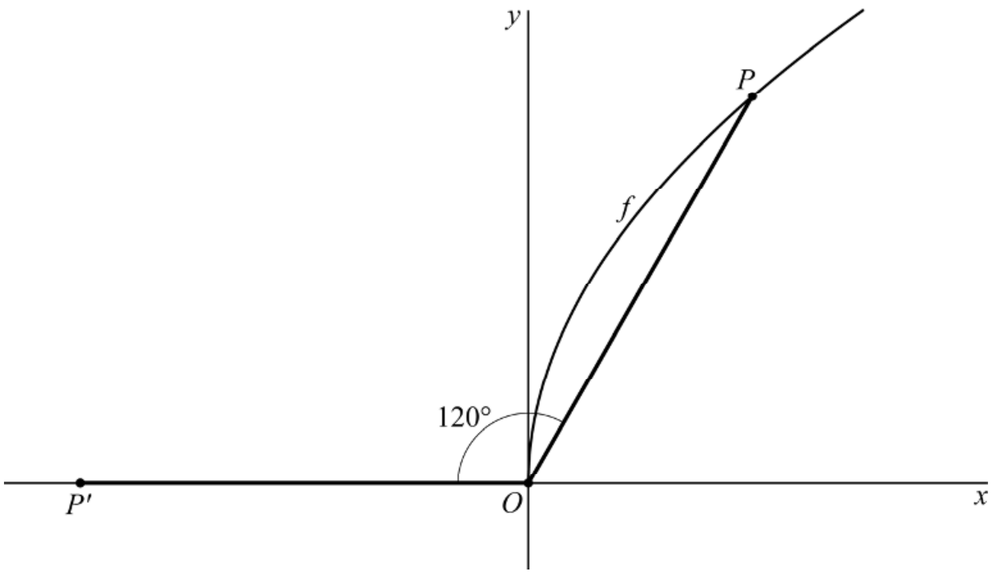
6p **13** Bereken exact deze waarde van q.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

P en *P'*

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 6\sqrt{x}$.
Het punt P is een punt op de grafiek van f rechts van de y-as.
Zie de figuur.

figuur



In de figuur is het punt P zo gekozen dat er een punt P' bestaat met de volgende eigenschappen:

- P' ligt op de negatieve x-as;
- Lijnstuk OP' heeft dezelfde lengte als lijnstuk OP;
- $\angle POP' = 120°$.

6p **14** Bereken exact de x-coördinaat van P'.